

ESTRATÉGIAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Não existem regras rígidas que garantam sucesso na solução de problemas. Porém, é possível esboçar alguns passos gerais no processo de problema-solução e fornecer alguns princípios que poderão ser úteis na solução de certos problemas. Esses passos e princípios são tão-somente o senso comum tornado explícito. Eles foram adaptados do livro de Jorge Polya, *How to Solve It*.

1. ENTENDO O PROBLEMA

O primeiro passo é ler o problema e assegurar de que o entendeu claramente. Faça a si mesmo as seguintes perguntas:

- O que é desconhecido?
- Quais as quantidades dadas?
- Quais são as condições dadas?

Para muitos problemas é proveitoso

- fazer um diagrama

e identificar no diagrama as quantidades dadas e pedidas. Usualmente é necessário

- introduzir uma notação apropriada.

Ao escolher os símbolos para as quantidades desconhecidas frequentemente usamos letras tais como a, b, c, m, n, x, y, mas em alguns casos ajuda usar as iniciais como símbolos sugestivos, por exemplo, V para o volume ou t para o tempo.

2. PLANEJANDO

Encontre uma conexão entre a informação dada e a pedida que o ajudará a encontrar a desconhecida. Em geral ajuda perguntar-se explicitamente: “Como posso relacionar o que foi dado com o que foi pedido?”. Se não for possível visualizar a conexão imediatamente, as idéias que se seguem podem ser úteis para delinear um plano.

Tente Reconhecer Algo Familiar: Relacione a situação dada com seu conhecimento anterior. Focalize na incógnita e tente lembrar um problema mais familiar envolvendo a mesma.

Tente Reconhecer Padrões: Alguns problemas são resolvidos reconhecendo-se o tipo de padrão no qual ocorre. O padrão pode ser geométrico, numérico ou algébrico. Você pode ver regularidade ou repetição em um problema ou ser capaz de conjecturar sobre o padrão de seu desenvolvimento para depois prová-lo.

Uso de Analogias: Tente pensar sobre problemas análogos, isto é, um problema similar, um problema relacionado, mas que seja mais simples do que o problema original. Se você puder resolver o problema similar mais simples, isso poderá lhe dar pistas para a

solução do problema original, mais difícil. Por exemplo, se um problema envolver números muito grandes, você poderá primeiro tentar um problema similar com números menores. Caso o problema envolva geometria tridimensional, você poderá tentar primeiro um problema similar bidimensional. Se seu problema for genérico, tente primeiro um caso especial.

Introduzindo Alguma Coisa Extra: Às vezes pode ser necessário introduzir algo novo, um auxílio extra, para que você faça a conexão entre o que foi dado e o que foi pedido. Por exemplo, em um problema onde o diagrama é fundamental, a ajuda extra pode ser o traçado de uma nova reta nele. Em problemas mais algébricos pode ser a introdução de uma nova incógnita relacionada com a original.

Dividindo em Casos: Algumas vezes temos de dividir o problema em vários casos e usar para cada um deles um argumento diferente. Por exemplo, usamos essa estratégia quando tratamos de valores absolutos.

Trabalhando Retroativamente: Às vezes, é proveitoso imaginar que seu problema foi resolvido e trabalhar passo a passo retroativamente até chegar ao que foi dado. E então você poderá ser capaz de reverter seus passos e, portanto construir uma solução para o problema original. Esse procedimento é usado frequentemente na solução de equações. Por exemplo, ao resolver a equação $3x - 5 = 7$, supomos que x é um número que satisfaz $3x - 5 = 7$ e trabalhamos retroativamente. Adicionamos 5 a ambos os lados da equação e então dividimos cada lado por 3 para obter $x = 4$. Como cada um desses passos pode ser revertido resolvemos o problema.

Estabelecendo Submetas: Em um problema complexo é frequentemente proveitoso estabelecer submetas (nas quais a situação desejada está somente parcialmente satisfeita). Você pode atingir primeiro essas submetas e depois, a partir delas, chegar à meta final.

Raciocínio Indireto: Algumas vezes é apropriado atacar o problema indiretamente. Para provar por contradição que P implica em Q , supomos que P e Q são falsos e tentamos mostrar por que isso não pode acontecer. De certa forma temos de usar essa informação e chegar a uma contradição útil do que sabemos perfeitamente ser verdadeiro.

Indução Matemática: Para provar afirmações que envolvem um número inteiro positivo n , é frequentemente útil usar o princípio que se segue:

Princípios da Indução Matemática: Seja S_n uma afirmação sobre o número inteiro positivo n . Suponha que :

1. S_1 é verdadeira.
2. S_{k+1} é verdadeira sempre que S_k for verdadeira.

Então S_n é verdadeira para todo n inteiro positivo.

Isso é razoável, pois uma vez que S_1 é verdadeira, segue, da condição 2 (com $k = 1$) que S_2 é verdadeira. Então, usando a condição 2 com $k = 2$, vemos que S_3 é verdadeira. E

novamente usando a condição 2 e dessa vez $k = 3$, temos que S_4 é verdadeira. Esse procedimento pode ser seguido indefinidamente.

3. CUMPRINDO O PLANO

Na etapa 2 um plano foi delineado. Para cumpri-lo devemos verificar cada etapa do plano e escrever os detalhes que provam a correção de cada etapa.

4. REVENDO

Tendo completado nossa solução, é prudente revisa-la, em parte para ver se foram cometidos erros e em parte para ver se podemos descobrir uma forma mais fácil de resolver um problema. Uma outra razão para a revisão é que ela nos familiarizará com o método de solução que poderá ser útil na solução de futuros problemas. Descartes disse: “todo problema que resolvi acabou tornando-se uma regra que serviu posteriormente para resolver outros problemas”.

Esses princípios da solução de problemas estão ilustrados nos exemplos a seguir. Antes de ver as soluções, tente resolvê-los usando os princípios estudados acima.

Exemplo 1:

Expresse a hipotenusa h do triângulo retângulo com uma área de 25m^2 como uma função do seu perímetro P .

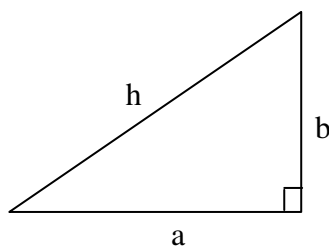
- Entendendo o problema

Classifique primeiro as informações identificando a quantidade desconhecida e os dados:

- Incógnita: hipotenusa h
- Quantidades dadas: perímetro P , área 25m^2

- Desenhando um diagrama

É útil fazer um diagrama, por isso construímos a figura abaixo.



- Ligando os dados com a incógnita
- Introduzindo alguma coisa extra

A fim de conectar o que foi dado à incógnita, introduzimos duas variáveis extras, a e b , que são os comprimentos dos outros dois lados do triângulo. Isso nos possibilitará expressar a condição dada, de o triângulo ser retângulo, pelo teorema de Pitágoras:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

As outras conexões entre as variáveis surgem escrevendo-se expressões para a área e o perímetro:

$$25 = \frac{1}{2}ab$$

$$P = a + b + h$$

Uma vez que P é dado, observe que temos agora três equações em três incógnitas a , b e h :

$$(1) \quad h^2 = a^2 + b^2$$

$$(2) \quad 25 = \frac{1}{2}ab$$

$$(3) \quad P = a + b + c$$

Embora tenhamos um número correto de equações. Elas não são fáceis de ser resolvidas diretamente. Porém, se usarmos as estratégias de problema-solução para tentar reconhecer algo familiar, então poderemos resolver essas equações de uma forma mais fácil.

- Relacionando com algo familiar

Olhando os segundos membros das equações 1, 2, 3, eles não lembram a você algo familiar? Observe que eles contêm os ingredientes de uma fórmula familiar:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Usando essa idéia, vamos expressar $(a + b)^2$ de duas maneiras. Das equações 1 e 2 temos:

$$(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab = h^2 + 4(25)$$

Da equação 3 temos:

$$(a + b)^2 = (P - h)^2 = P^2 - 2Ph + h^2$$

Assim

$$h^2 + 100 = P^2 - 2Ph + h^2$$

$$2Ph = P^2 - 100$$

$$h = \frac{P^2 - 100}{2P}$$

Essa é a expressão requerida para h com uma função de P.

Como no exemplo ilustrado a seguir, é frequentemente necessário usar o princípio de dividir em casos quando tratamos com valores absolutos.

Exemplo 2:

Resolva a desigualdade $|x - 3| + |x + 2| < 11$.

Lembre-se da definição de valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} |x - 3| &= \begin{cases} x - 3 & \text{se } x - 3 \geq 0 \\ -(x - 3) & \text{se } x - 3 < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x - 3 & \text{se } x \geq 3 \\ -x + 3 & \text{se } x < 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} |x + 2| &= \begin{cases} x + 2 & \text{se } x + 2 \geq 0 \\ -(x + 2) & \text{se } x + 2 < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \geq -2 \\ -x - 2 & \text{se } x < -2 \end{cases} \end{aligned}$$

- Dividindo em casos

Essas expressões mostram que devemos considerar três casos:

- 1) $x < -2$
- 2) $-2 \leq x < 3$
- 3) $x \geq 3$

Caso I:

Se $x < -2$, temos:

$$\begin{aligned} |x - 3| + |x + 2| &< 11 \\ -x + 3 - x - 2 &< 11 \\ -2x &< 10 \\ x &> -5 \end{aligned}$$

Caso II:

Se $-2 \leq x < 3$, a desigualdade dada torna-se

$$\begin{aligned} -x + 3 + x + 2 &< 11 \\ 5 &< 11 \text{ (sempre é verdadeiro)} \end{aligned}$$

Caso III:

Se $x \geq 3$ a desigualdade torna-se

$$\begin{aligned} x - 3 + x + 2 &< 11 \\ 2x &< 12 \\ x &< 6 \end{aligned}$$

Combinando os casos I, II, III, vemos que a desigualdade está satisfeita quando $-5 < x < 6$. Logo a solução é o intervalo $(-5, 6)$.

No exemplo a seguir tentaremos configurar a resposta examinando casos especiais e reconhecendo um padrão. A seguir vamos prová-lo usando indução matemática.

Ao usar o Princípio da Indução Matemática, vamos seguir as três etapas:

- Passo 1: Prove que S_n é verdadeira quando $n = 1$.
- Passo 2: Assuma que S_n é verdadeira quando $n = k$ e deduza que S_n é verdadeira quando $n = k + 1$.
- Passo 3: Conclua que S_n é verdadeira para todo n pelo Princípio da Indução Matemática.

Exemplo 3:

Se $f_0(x) = \frac{x}{x+1}$ e $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$ para $n = 0, 1, 2, \dots$, encontre uma fórmula para $f_n(x)$.

- Analogia: vamos tentar um problema mais simples.

Começamos por encontrar fórmulas para $f_n(x)$ nos casos especiais $n = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (f_0 \circ f_0)(x) = f_0(f_0(x)) = f_0\left(\frac{x}{x+1}\right) \\ &= \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + 1} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x+1}{x+1}} = \frac{x}{2x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= (f_0 \circ f_1)(x) = f_0(f_1(x)) = f_0\left(\frac{x}{2x+1}\right) \\ &= \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1} + 1} = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{3x+1}{2x+1}} = \frac{x}{3x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3(x) &= (f_0 \circ f_2)(x) = f_0(f_2(x)) = f_0\left(\frac{x}{3x+1}\right) \\ &= \frac{\frac{x}{3x+1}}{\frac{x}{3x+1} + 1} = \frac{\frac{x}{3x+1}}{\frac{4x+1}{3x+1}} = \frac{x}{4x+1} \end{aligned}$$

- Procurando por um padrão

Observando um padrão: o coeficiente de x no denominador de $f_n(x)$ é $n + 1$ nos três casos calculados. Assim sendo, fazemos a seguinte conjectura no caso geral,

$$f_n(x) = \frac{x}{(n+1)x+1} \quad (I)$$

Para provar, usamos o Princípio da Indução Matemática. Já vimos que (I) é verdadeira para $n=1$. Suponha que ela é verdadeira para $n = K$, isto é,

$$f_k(x) = \frac{x}{(k+1)x+1}$$

Então,

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= (f_0 \circ f_k)(x) = f_0\left(\frac{x}{(k+1)x+1}\right) \\ &= \frac{\frac{x}{(k+1)x+1}}{\frac{x}{(k+1)x+1} + 1} = \frac{\frac{x}{(k+1)x+1}}{\frac{x + (k+1)x+1}{(k+1)x+1}} = \frac{x}{(k+2)x+1} \end{aligned}$$

Essa expressão mostra que (I) é verdadeira para $n = K+1$. Portanto, por indução matemática, é verdadeira para todo n inteiro positivo.

BIBLIOGRAFIA:

STEWART, James. *Cálculo*, Volume 1, 4ª Edição. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.